

RESUELTO

LAS SOLUCIONES SON
ORIENTATIVAS, ASÍ
COMO LOS MÉTODOS PROPUESTOS

P1	P2	P3	P4	P5	P6	NOTA
AAJ	ARV	RRF	ARV	AAJ	RRF	

NOMBRE Y APELLIDOS: _____ GRUPO: _____

1^{er} Parcial2^o Parcial

Toda la Asignatura

Subir Nota

- Los alumnos con el **1^{er} parcial** pendiente deben realizar los problemas P1, P2 y P3.
- Los alumnos con el **2^o parcial** pendiente deben realizar los problemas P4, P5 y P6.
- Los alumnos con **toda la asignatura** pendiente deben realizar los problemas ~~P2~~, P3, P4, P5 y P6.
- Los alumnos que quieran **subir nota** deben realizar todos los problemas.

Todos los problemas valen los mismos puntos.

Por favor, no emplee más espacio que el indicado para cada apartado.

P1.- Considere el circuito de la Fig.1. Originalmente la llave *a* está cerrada (ON) y la llave *b* abierta (OFF), situación en la que el circuito permanece durante el tiempo suficiente para alcanzar un estado estacionario.

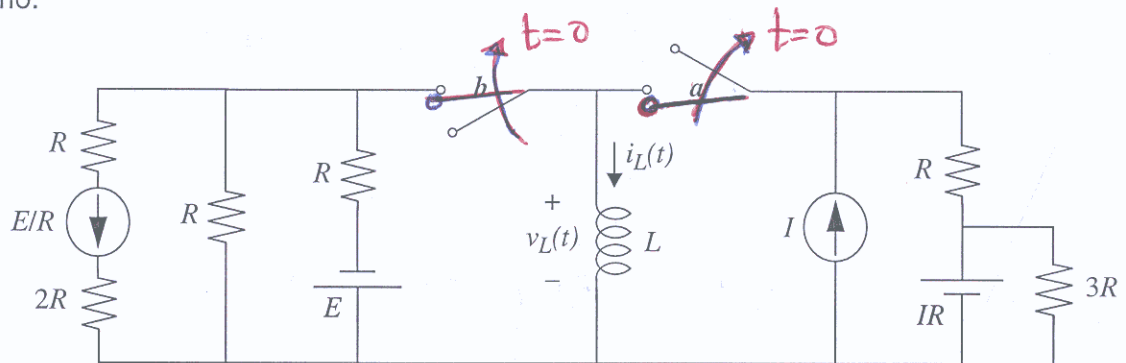


Fig.1

1a.- Suponiendo que en el instante $t = 0$ la llave *a* se abre y la *b* se cierra, determine la intensidad $i_L(t)$ y la tensión $v_L(t)$ en la bobina en función del tiempo. Indique la constante de tiempo y el valor de dichas variables en el estacionario.

$t < 0$

En el estacionario ($t = 0^-$)
 $i_L(0^-) = 2I$

$t > 0$

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2I$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)] e^{-t/\tau}$$

$$i_L(\infty) = -\frac{2E}{R} ; \tau = \frac{2L}{R}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = -\frac{2E}{R} + \left(2I + \frac{2E}{R}\right) e^{-t/\frac{2L}{R}}$$

$$v_L(t) = -(IR + E) e^{-t/\frac{2L}{R}}$$

$i_L(t)$

$2I$

$-\frac{2E}{R}$

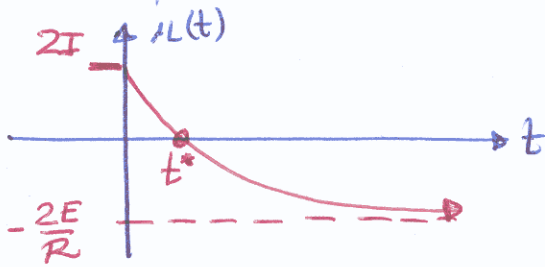
$\tau = \frac{2L}{R}$

$v_L(t)$

$-(IR+E)$

$\tau = \frac{2L}{R}$

1b.- Suponiendo $E, I > 0$, determine el tiempo para el cual la intensidad $i_L(t)$ es nula.



$$i_L(t^*) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)] e^{-t^*/\tau}$$

$$\ln \left[\frac{i_L(t^*) - i_L(\infty)}{i_L(0) - i_L(\infty)} \right] = -\frac{t^*}{\tau}$$

$$t^* = \tau \ln \left[\frac{i_L(0) - i_L(\infty)}{i_L(t^*) - i_L(\infty)} \right]$$

$$i_L(0) = 2I$$

$$i_L(\infty) = -\frac{2E}{R}$$

$$i_L(t^*) = 0$$

$$\tau = \frac{2L}{R}$$

$$t^* = \frac{2L}{R} \ln \left[\frac{2I + 2E/R}{0 + 2E/R} \right] =$$

$$= \frac{2L}{R} \ln \left(1 + \frac{IR}{E} \right)$$

1c.- Determine la relación que deben cumplir E, I y R para que no exista comportamiento transitorio en $i_L(t)$.

Para que \nexists transitorio basta $i_L(\infty) = i_L(0)$

\Downarrow

$$2I = -\frac{2E}{R} \Rightarrow E = -IR$$

P2.- El circuito de la Fig.2 muestra la conexión de una fuente ideal de intensidad $i(t)$ con un elemento de dos terminales que contiene exclusivamente un resistor lineal y un elemento reactivo inicialmente relajado (un condensador o una bobina). En las Figs.2a, b y c se muestran las respuestas $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $v_3(t)$ a la entrada $i(t)$ para tres instancias distintas.

Determine la topología de cada una de tales instancias y los valores de los elementos (tanto resistivo como reactivo) de cada una de ellas.

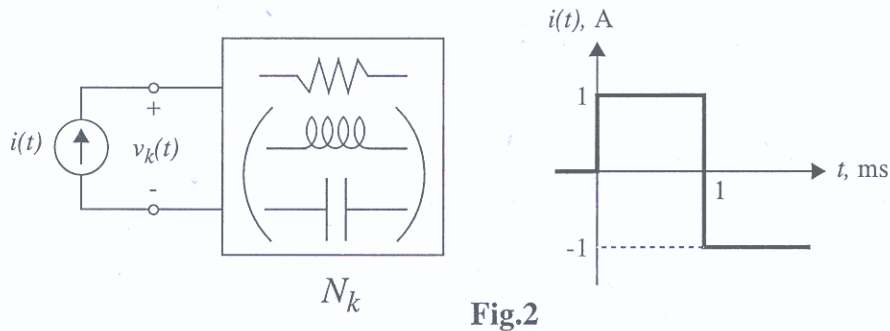


Fig.2a

Tipica carga y descarga de un C con arreglo o una Z

POSIBILIDADES:

(A) $\frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
 Dada $i(t)$ habría relaciones exponenciales de $v(t) \rightarrow 0$ (bobina \rightarrow corto)

(B) $v(t) = i(t) \cdot R + L \frac{di(t)}{dt}$
 Dada $i(t)$, $\frac{di(t)}{dt} = 0$ en $\begin{cases} (0, 1) \\ (1, \infty) \end{cases}$
 $v(t)$ lineal con $i(t)$ (constante a tramos)
 (bobina \rightarrow corto, $v(t)$ cae en R)

(C) $RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = i(t)R$
 $v(t)$ exponencial y carga del condensador (C \rightarrow abierto)

(D) $v(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i(t) dt$
 Dada $i(t)$, $v(t)$ lineal en t.

Solución para Fig.2a:

$0 < t < 1 \text{ ms}$
 $v_1(0) = 2 = 1 \times R$
 $R = 2 \Omega$

$v(t) = 2 + (0 - 2)e^{-t/RC} \rightarrow v(1 \text{ ms}) = 2(1 - e^{-1 \text{ ms}/RC}) = 1.6 \text{ V}$

$-\frac{1 \text{ ms}}{RC} = \ln\left(1 - \frac{1.6}{2}\right) \rightarrow C = \frac{-10^{-3}}{2 \ln\left(1 - \frac{1.6}{2}\right)} = 0.31 \mu\text{F}$

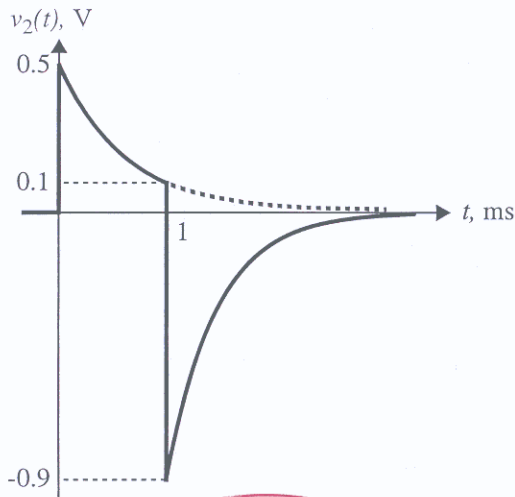
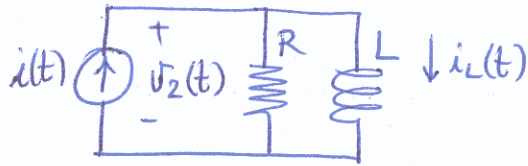


Fig.2b

Típica carga de bobina a una intensidad dada con arreglo a una τ . La tensión en la $L \rightarrow 0$.



$$i_L(0) = 0 \Rightarrow v_2(0^+) = i(0^+) \cdot R$$

$$0.5V = 1A \cdot R \Rightarrow R = 0.5\Omega$$

$$v_L(t) = v_2(t) = 0.5 \cdot e^{-t/\tau}; \tau = L/R$$

$$v_2(1ms) = 0.1V = 0.5 e^{-1ms/LR}$$

$$-\frac{1ms}{L} \times R = \ln\left(\frac{0.1}{0.5}\right)$$

$$L = -\frac{1ms \times R}{\ln\left(\frac{0.1}{0.5}\right)} = \frac{1m \times 0.5}{\ln(5)} = 0.31mH$$

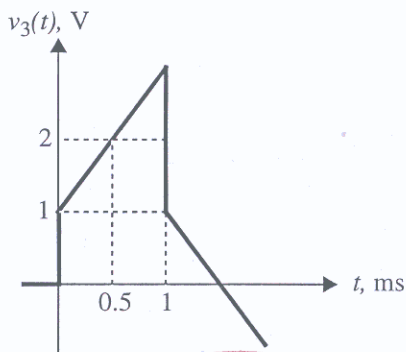
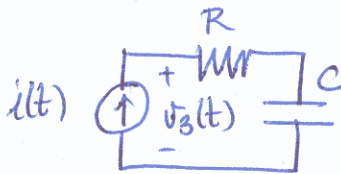


Fig.2c

No hay comportamiento exponencial
Tensión discontinua y lineal en t.
Se integra la corriente en un C.



$$0 < t < 1ms$$

$$v_3(t) = i(t)R + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$[i(t) = 1A]$$

$$v_3(0^+) = 1V = 1A \times R \rightarrow R = 1\Omega$$

$$\text{pendiente de } v_3(t) = \frac{1}{C} = \frac{1}{0.5m}$$

$$C = 0.5mF$$

P3.- En el circuito de la Fig.3 suponga que en $t = 0$ el condensador está relajado y que la bobina tiene una intensidad I_0 . Escriba la ecuación diferencial que rige la respuesta al estado y determine los posibles tipos de respuesta al estado en función del valor de k .

Ilustre gráficamente la respuesta $i(t)$ obtenida en los distintos casos.

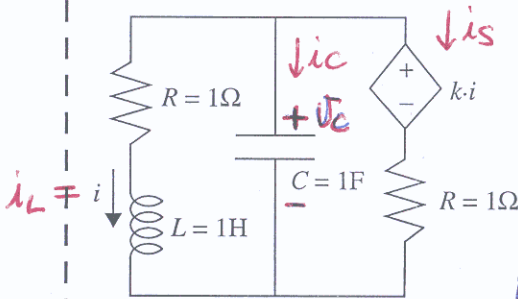


Fig.3

$$\begin{cases} i_L + i_c + i_s = 0 \\ V_c = V_L + i_L R = k i_L + i_s R \\ \downarrow L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = k i_L + R(-i_L - i_c)$$

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = k i_L - R i_L - R i_c \quad i_c = C \frac{dV_c}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + RC \frac{di_L}{dt}$$

$$RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (L + RC) \frac{di_L}{dt} + (R + R - k) i_L = 0$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \frac{di_L}{dt} + \left(\frac{2}{LC} - \frac{k}{RLC} \right) i_L = 0 \quad [k] = \Omega$$

Condiciones iniciales:

$$i_L(0) = I_0$$

$$V_c(0) = 0 = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} + i_L(0) R \rightarrow \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{I_0 R}{L}$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{2}{LC} - \frac{k}{RLC} \right)} \right]$$

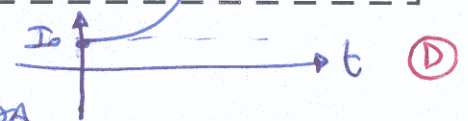
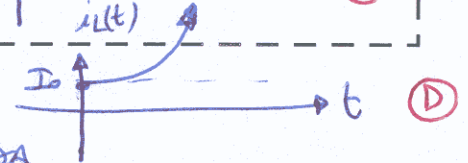
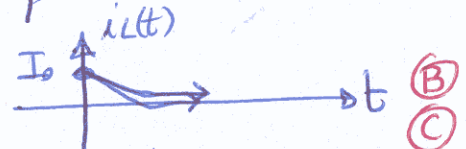
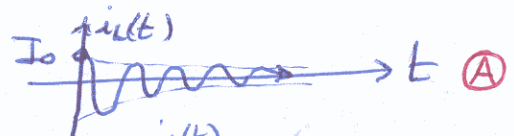
$$\left. \begin{matrix} R=1\Omega \\ C=1F \\ L=1H \end{matrix} \right\} s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-2 \pm \sqrt{4 - 4(2-k)} \right] = -1 \pm \sqrt{k-1}$$

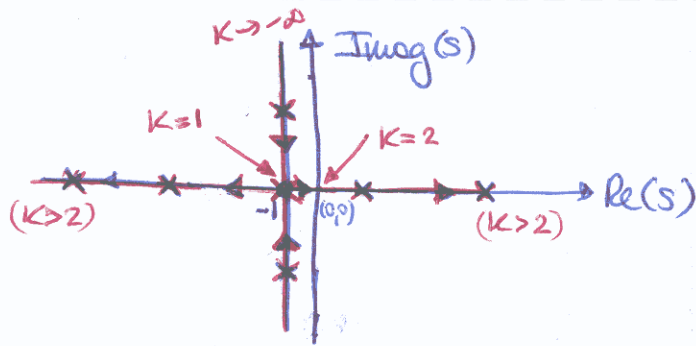
(A) $k < 1$ → complejos conjugados ⇒ SUB-AMORTIGUADA

(B) $k = 1$ → real doble ⇒ CRÍTICAMENTE AMORTIGUADA

(C) $1 < k < 2$ → reales distintas estable ⇒ SOBRES-AMORTIGUADA (ambas en S.I.)

(D) $k > 2$ → reales y distintas, pero una en semiplano derecho ⇒ inestable SOBRES-AMORTIGUADA





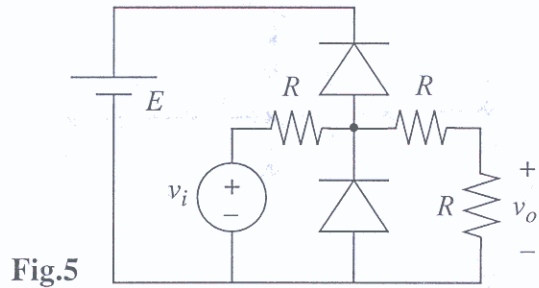
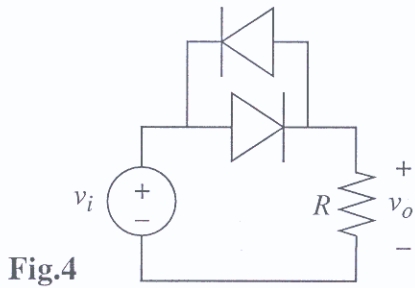
- ¿Puede ser inestable el circuito dependiendo del valor que tome k ?

Si $k > 2$, uno de los polos reales pasa al semiplano derecho
 \Downarrow
 Inestable

- ¿Puede presentar $i_L(t)$ un comportamiento oscilatorio sin pérdidas dependiendo del valor que tome k ?

No, siempre \exists parte real para los polos,
 independientemente de k .

P4.- Considere los dos circuitos con diodos de la Figs.4 y 5. Determine la tensión de salida v_o en función de la entrada v_i para los siguientes casos:



4a.- Considerando un modelo ideal para los diodos.

Fig.4 Analysis:

Two diodes in parallel. For $v_i > 0$, D_1 is ON and D_2 is OFF. For $v_i < 0$, D_2 is ON and D_1 is OFF. The output voltage v_o is always equal to v_i .

Fig.5 Analysis:

The circuit consists of a voltage source v_i in series with a resistor R , followed by two diodes in parallel, each in series with a resistor R , and finally a load resistor R in parallel. The output voltage v_o is measured across the load resistor.

Handwritten Analysis:

Los dos diodos ideales en paralelo equivalen a un corto (lógico, siempre conduce uno de los dos)

Case 1: $v_i > E$
 D_2 en serie con E . D_1, D_2 off. $v_o = E$ (Limitador de tensión)

Case 2: $0 < v_i < E$
 D_1, D_2 off. $i = 0$. $v_o = \frac{1}{3} v_i$ (divisor de tensión)

Case 3: $v_i < 0$
 D_1 ON, D_2 OFF. $v_o = 0$

Derivations:

- $i > 0$? $v = E$
 $\frac{v_i - E}{R} = i + \frac{E}{2R} \Rightarrow i = \frac{2v_i - 3E}{2R} > 0 \Rightarrow v_i > \frac{3}{2} E$
- $0 < v < E$? $i = 0$
 $v = \frac{2}{3} v_i$ $0 < \frac{2}{3} v_i < E \Rightarrow 0 < v_i < \frac{3}{2} E$
- $i < 0$? $v = 0$
 $\frac{v_i - 0}{R} = i + \frac{0 - 0}{2R} \Rightarrow v_i < 0$

Graphs:

- Graph of v_o vs v_i for Fig.4: A straight line with slope 1, passing through the origin.
- Graph of v_o vs v_i for Fig.5: A piecewise linear function. For $v_i < 0$, $v_o = 0$. For $0 < v_i < \frac{3}{2} E$, $v_o = \frac{1}{3} v_i$. For $v_i > \frac{3}{2} E$, $v_o = E$.

4b.- Considerando un modelo con tensión de encendido (o de corte) $E_\gamma = 1V$.

Diagram showing a diode bridge rectifier circuit with a load resistor and a DC source. The input voltage is U_i and the output voltage is U_o . The diodes have a forward voltage drop E_γ .

Graphs showing the relationship between U_o and U_i for different diode states:

- 1) $U = E_\gamma$ si $i > 0 \rightarrow U_o = U_i - E_\gamma$ si $U_i > E_\gamma$
- 2) $i = 0$ si $-E_\gamma < U < E_\gamma \rightarrow U_o = 0$ $-E_\gamma < U_i < E_\gamma$
- 3) $U = -E_\gamma$ si $i < 0 \rightarrow U_o = U_i + E_\gamma$ $U_i + E_\gamma < 0 \rightarrow U_i < -E_\gamma$

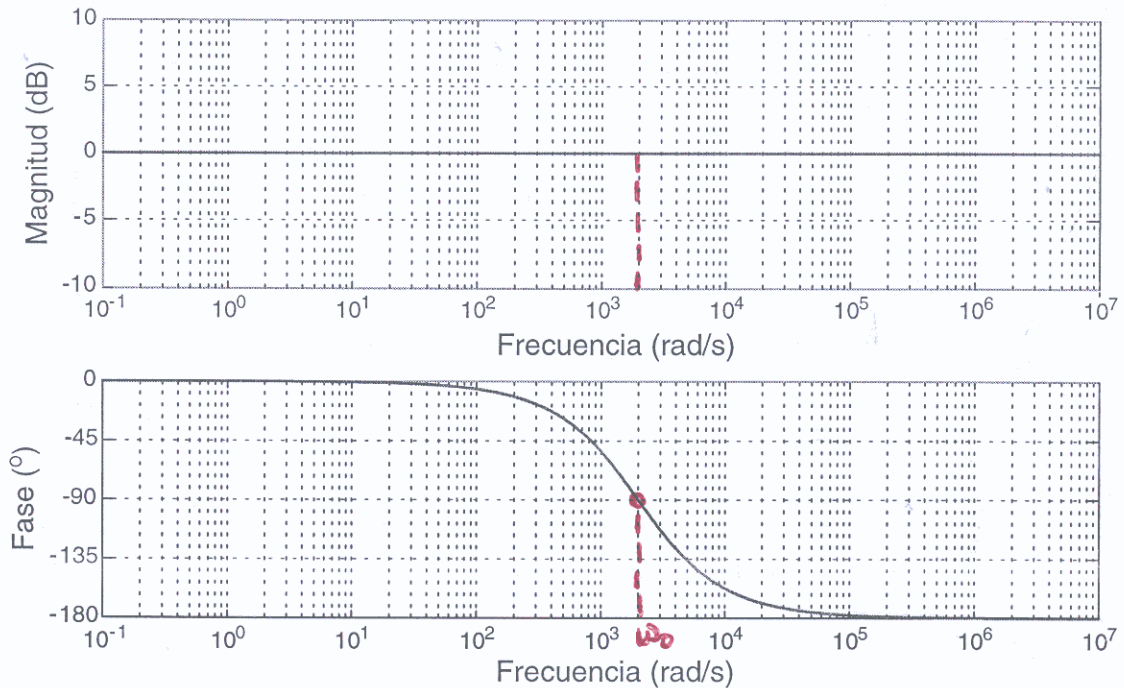
Diagram showing a full-bridge rectifier circuit with two resistors in series in the load path. The input voltage is U_i and the output voltage is U_o . The diodes have a forward voltage drop E_γ .

Graphs showing the relationship between U_o and U_i for different diode states:

- 1) $(D_1 \text{ off}, D_2 \text{ on})$ si $i > 0, U = E + E_\gamma \rightarrow U_o = \frac{1}{2}(E + E_\gamma)$
 $\frac{U_i - (E + E_\gamma)}{R} = i + \frac{(E + E_\gamma)}{2R} \rightarrow U_i > \frac{3}{2}(E + E_\gamma)$
- 2) $(D_1, D_2 \text{ off}) \rightarrow U_o = \frac{1}{3}U_i$
 $-E_\gamma < U < E + E_\gamma, i = 0$
 $-\frac{3}{2}E_\gamma < U_i < \frac{3}{2}(E + E_\gamma)$
- 3) $(D_1 \text{ on}, D_2 \text{ off})$ si $i < 0, U = -E_\gamma \rightarrow U_o = -\frac{E_\gamma}{2}$
 $\frac{U_i + E_\gamma}{R} = i + \frac{-E_\gamma}{2R} \Rightarrow U_i < -\frac{3}{2}E_\gamma$

Graphs showing the relationship between U_o and U_i for different diode states, including the slope of the linear regions.

P5.- Considere el siguiente diagrama de Bode.



5a.- Determine la función de transferencia $H(s)$ correspondiente a dicho diagrama de Bode. Determine qué tipo de filtrado realiza e indique una posible utilidad del mismo.

Si $|H(j\omega)| \equiv 1 \equiv 0\text{dB}$, $\forall \omega$ es porque el numerador y el denominador de $H(s)$ tienen siempre el mismo módulo; es decir, pueden existir polos y ceros, pero a las mismas frecuencias, de forma que las pendientes que introduzcan se compensen.

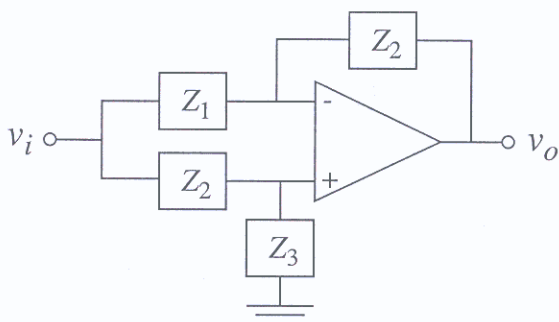
Si la fase cambia (como en el caso dado), es porque los polos y los ceros que hay (necesariamente a la misma frecuencia) están en semiplanos distintos. Si esto no fuera así, el diagrama de fase también sería plano $\forall \omega$.

Como la fase va cambiando de 0° a -180° , necesariamente se tiene un polo en el S. Izdo (-90°) y un cero en S. dcho ($+90^\circ$) a $\omega_0 = 2\text{krad/s}$.

Por otro lado, la constante k tiene módulo necesariamente 1 (por el diagrama de magnitud) y fase $0^\circ \rightarrow k \equiv 1$.

Luego:
$$H(s) = K \frac{1 + \frac{s}{(-\omega_0)}}{1 + \frac{s}{(\omega_0)}} \Rightarrow H(s) = \frac{1 - \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 - s}{\omega_0 + s}$$

5b.- Determine la función de transferencia $H(s) = v_o/v_i$ del circuito de la figura y determine la naturaleza y el valor de las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 para obtener una función de transferencia cuyo diagrama de Bode coincida con el del apartado anterior. Considere un modelo ideal para el amplificador operacional.



$$V_o = \underbrace{-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} V_i}_{\text{config. inversora}} + \underbrace{\left(1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\right)}_{\text{config. no-invers.}} \cdot \underbrace{\frac{Z_3(s)}{Z_2(s) + Z_3(s)}}_{\text{divisor de tensión}} V_i$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{-Z_2(Z_2 + Z_3) + Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1(Z_2 + Z_3)} =$$

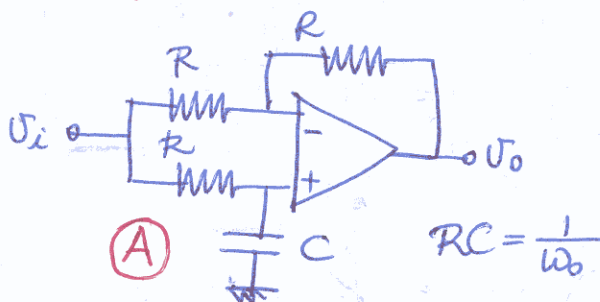
$$= \frac{-Z_2^2 - Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3)} = \frac{Z_1 Z_3 - Z_2^2}{Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}$$

Para obtener la función $H(s)$ del apartado anterior:

$$\boxed{Z_1(s) = Z_2(s)} \implies H(s) = \frac{Z_1(Z_3 - Z_1)}{Z_1(Z_3 + Z_1)}$$

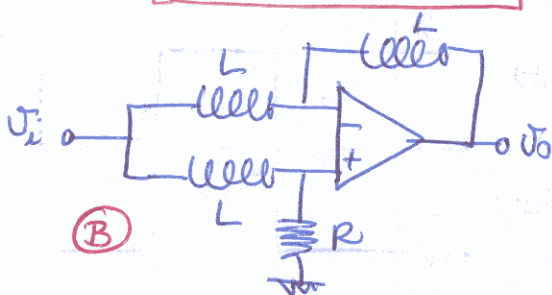
$$\textcircled{A} \left. \begin{array}{l} Z_3(s) = \frac{1}{sC} \\ Z_1(s) = Z_2(s) = R \end{array} \right\} H(s) = \frac{\frac{1}{sC} - R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{1 - sRC}{1 + sRC}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$



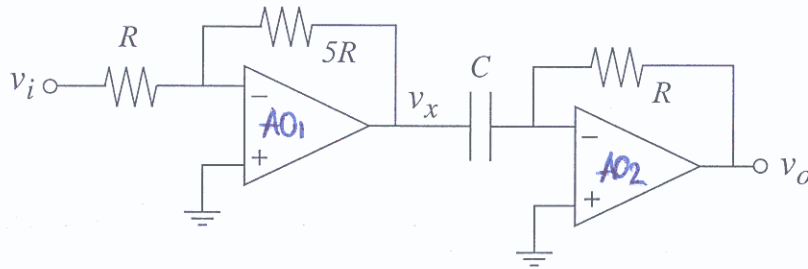
$$\textcircled{B} \left. \begin{array}{l} Z_3(s) = R \\ Z_1(s) = Z_2(s) = sL \end{array} \right\} H(s) = \frac{R - sL}{R + sL} = \frac{1 - sL/R}{1 + sL/R}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$

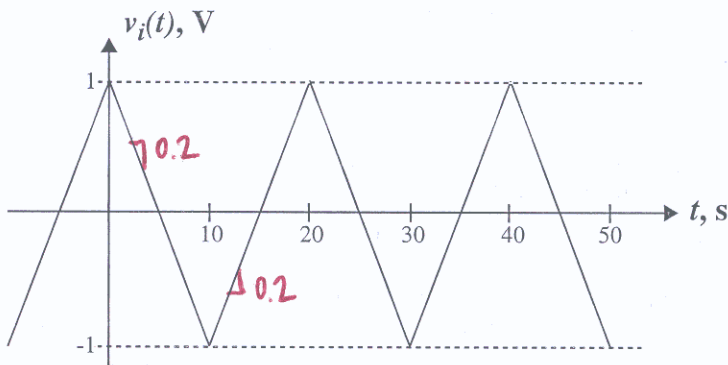


(A pesar de ser un sistema de 3er orden, hay cancelaciones polo-cero y se reduce a 1er orden)

P6.- Considere el circuito de la figura, en el que $RC = 1\text{s}$ y los amplificadores operacionales presentan tensiones de saturación de $\pm 20\text{V}$.

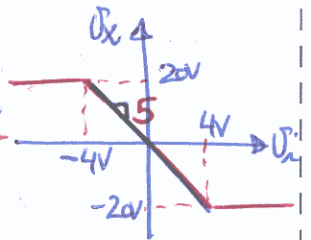


6a.- Determine y dibuje las tensiones $v_x(t)$ y $v_o(t)$ en función del tiempo para el caso en que la entrada $v_i(t)$ es la mostrada en la figura.



$$v_x(t) = -\frac{5R}{R} v_i(t) = -5v_i(t)$$

Configuración
inversora
en AO_1

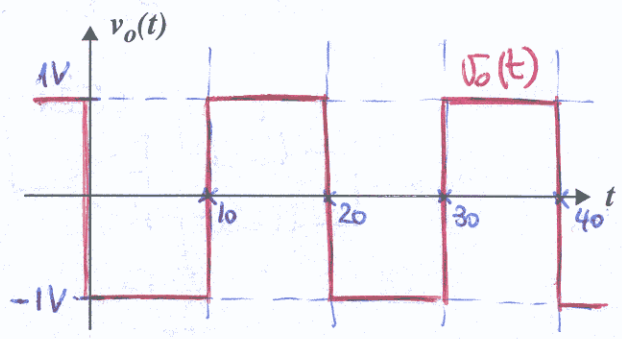
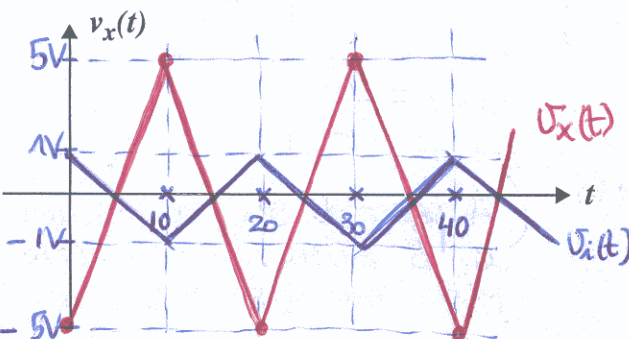
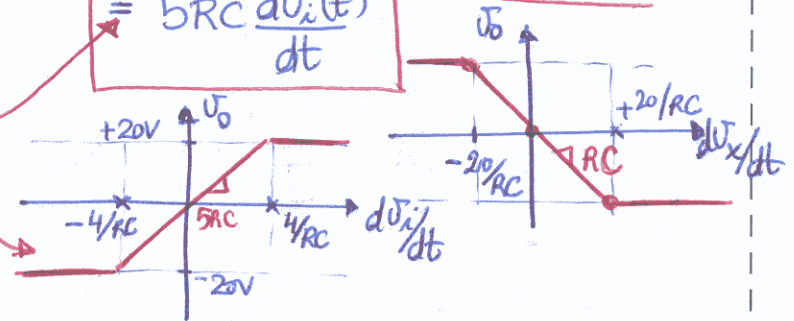


$$C \frac{dv_x(t)}{dt} = -\frac{v_o(t)}{R} \Rightarrow v_o(t) = -RC \frac{dv_x(t)}{dt}$$

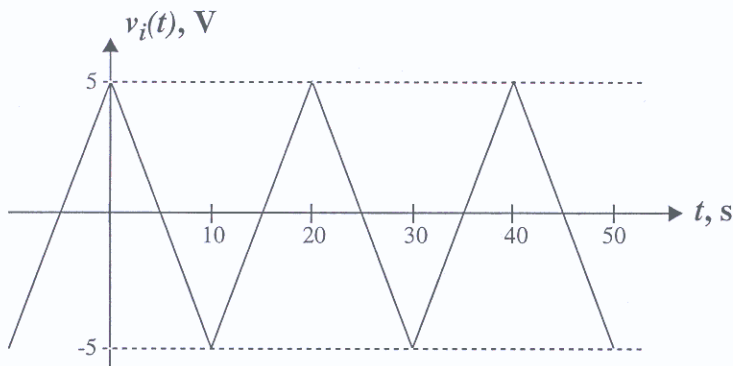
$$(RC = 1\text{s}) \Rightarrow v_o(t) = 5RC \frac{dv_i(t)}{dt}$$

diferenciador
en AO_2

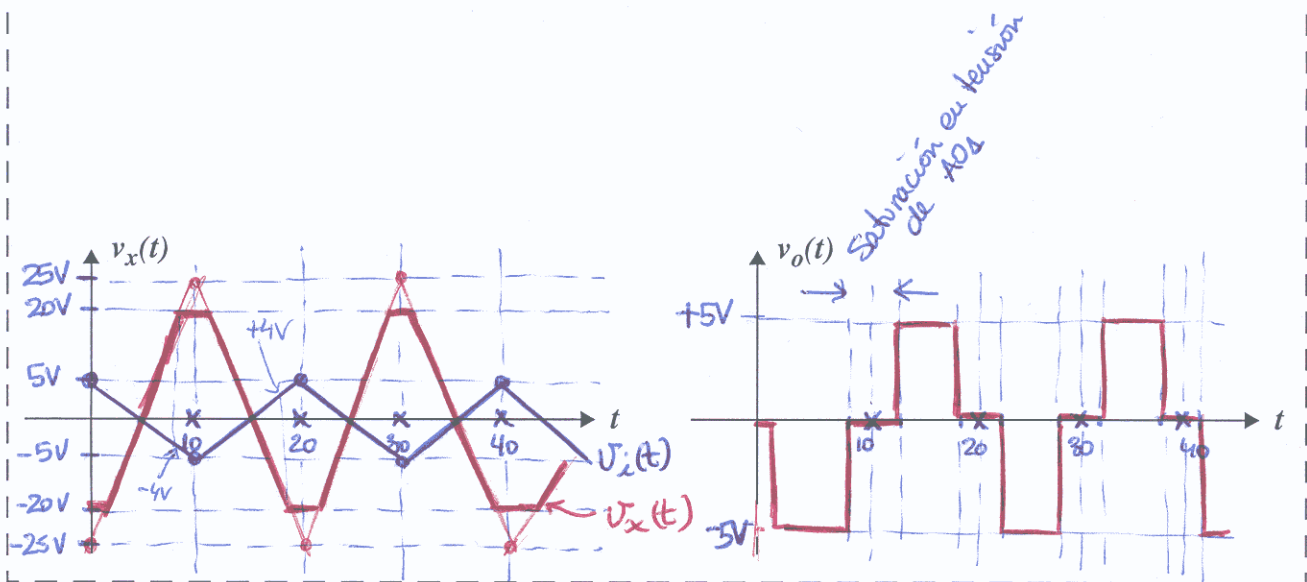
Siempre
que AO_1 esté
en zona
lineal.



6b.- Determine y dibuje las tensiones $v_x(t)$ y $v_o(t)$ en función del tiempo para el caso en que la entrada $v_i(t)$ es la mostrada en la figura.



- AO_1 saturará en tensión, ya que $v_i > 4V$ y $v_i < -4V$
- AO_2 no saturará, ya que la pendiente de $v_i(t)$ es ± 1 .



6c.- Determine la relación entre la amplitud y el periodo de la señal triangular para que el amplificador operacional de la derecha no entre nunca en saturación.

