

ELECTRÓNICA BÁSICA

PRIMER PARCIAL. CURSO 04/05

RESUELTO

NOMBRE Y APELLIDOS _____

GRUPO _____

EJ.1	EJ.2	EJ.3	EJ.4	EJ.5	
ARV	ACT	RRF	ACT	ARV	

EJERCICIO 1

Considere un condensador de capacidad C conectado un resistor no lineal con la característica $i - v$ que se muestra en la Figura 1.a.

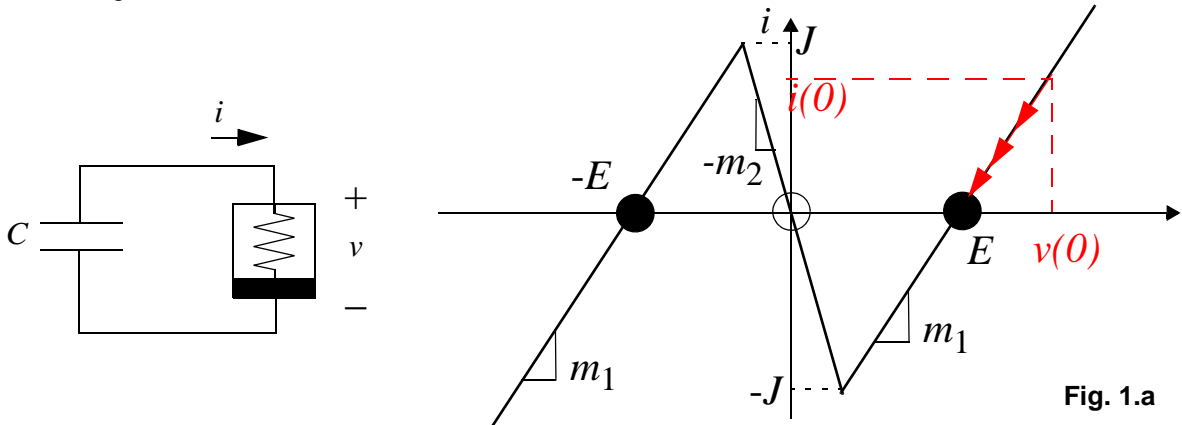


Fig. 1.a

a) Determine la ruta dinámica, los puntos de equilibrio y su naturaleza, identificando la operación del circuito como estable o biestable. Dibuje cualitativamente las formas de onda para $v(t)$ e $i(t)$ en el caso en que el condensador tenga inicialmente una tensión $v(0) > E$.

En teoría hemos visto que:

- El **concepto de equilibrio** tiene sentido cuando hablamos de circuitos dinámicos; esto es, que tienen variables cambiantes con el tiempo. En estos circuitos el equilibrio corresponde a las situaciones donde la tendencia al cambio (medida por las derivadas de las variables) es nula.
- Para estudiar el equilibrio, tenemos que escribir las ecuaciones diferenciales que controlan la dinámica. En nuestro caso, sólo hay una ecuación, asociada al comportamiento constitutivo del condensador.

Llamando $i = f(v)$ a la característica del resistor no-lineal se obtiene,

$$C \frac{dv}{dt} = -i = -f[v(t)] \tag{1}$$

Los equilibrios se dan por tanto para,

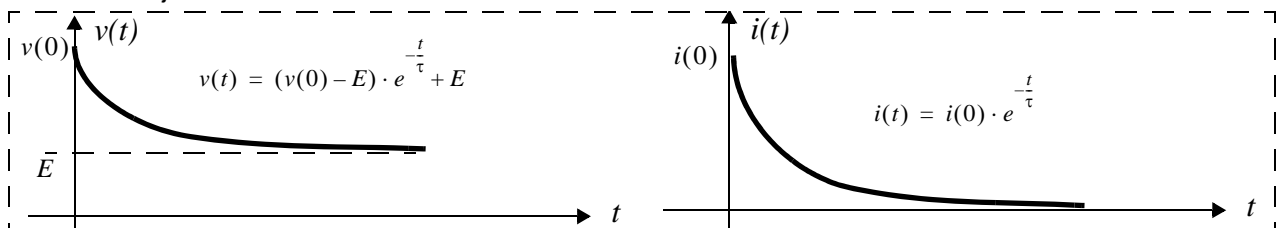
$$C \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow f(v) = 0 \tag{2}$$

Que corresponden a los **puntos de corte de la característica $i = f(v)$ con el eje horizontal**. Estos puntos de corte están marcados con círculos en la figura de arriba. Hay tres puntos de equilibrio, respectivamente:

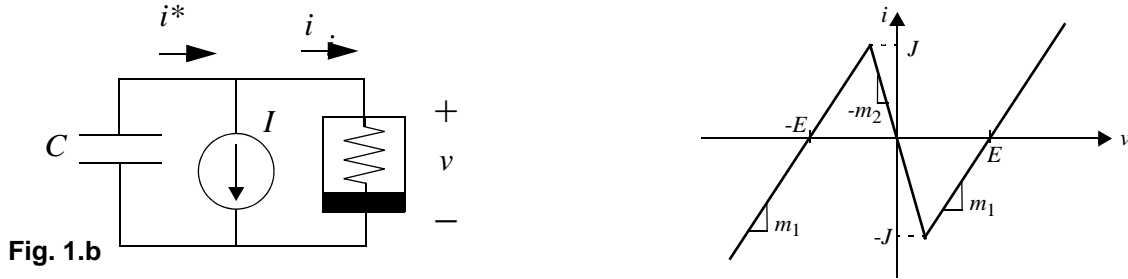
$$|v = -E, \quad v = 0 \quad \text{y} \quad v = E \tag{3}$$

Cada uno tiene propiedades distintas de **estabilidad**. La estabilidad mide la tendencia del sistema a regresar al equilibrio cuando sufre una perturbación. Esta tendencia está determinada por el signo de la derivada en el equilibrio. Derivada negativa (equivale a condensador conectado a resistencia positiva) implica estabilidad; derivada positiva (condensador conectado a resistencia negativa) implica inestabilidad. Por tanto, el punto central de arriba (círculo blanco) es inestable, mientras que los exteriores (círculos negros) son estables. Se trata pues de un **BIESTABLE**.

La **ruta dinámica** desde un punto $v(0) > E$ es la indicada en la figura de arriba. El sistema evoluciona hacia el punto de equilibrio estable de la derecha. En esta evolución sólo hay una constante de tiempo pues nos movemos sobre un único tramo. Esta constante de tiempo es $\tau = C/m_1$. La intensidad y la tensión evolucionan de forma exponencial hacia sus respectivos equilibrios ($i = 0$ y $v = E$) con las formas de onda mostrada abajo.



- a) Considere que se conecta en paralelo al condensador y al resistor no lineal una fuente de intensidad de valor $I > 0$, tal y como se muestra en la Figura 1.b. Determine el rango de valores de I para que el circuito tenga un único punto de equilibrio real y estable. Dibuje cualitativamente las formas de onda para $v(t)$ e $i(t)$ en el caso en que el condensador tenga inicialmente una tensión $v(0) > E$.



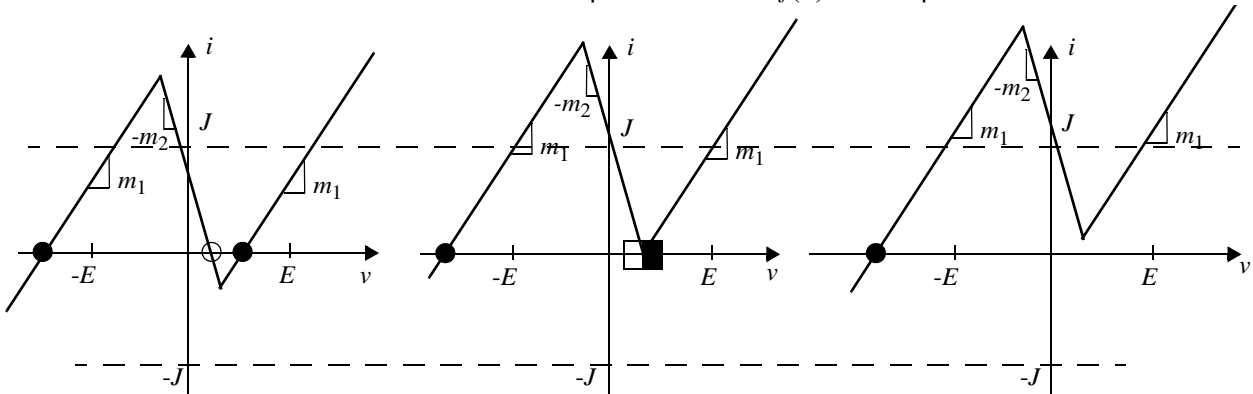
En este nuevo circuito, la fuente fuerza en el condensador una intensidad que es independiente de la tensión. La ecuación diferencial es ahora,

$$C \frac{dv}{dt} = -i^* = -I - f(v) \tag{4}$$

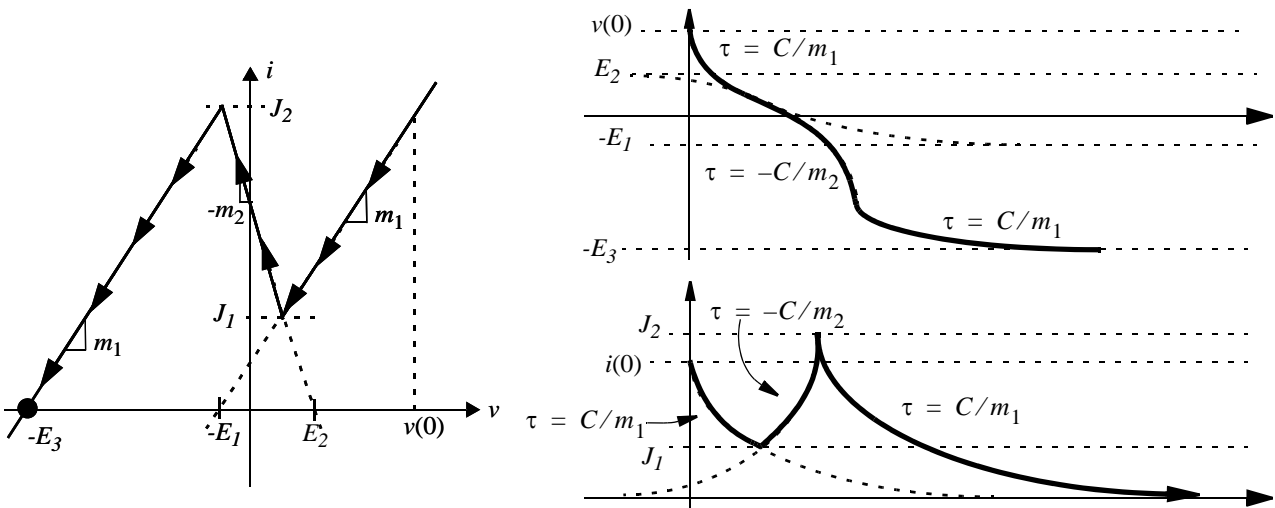
Los puntos de equilibrio se corresponden por lo tanto con aquellos valores de v que cumplen la condición

$$f(v) = -I \tag{5}$$

De la característica del resistor observamos que esta condición se puede dar bien en tres puntos (si $I < J$), o en un sólo punto (si $I > J$). El valor límite se corresponde por tanto con $I = J$. Esta conclusión se puede obtener también observando la característica compuesta $i^* = I + f(v)$ "vista" por el condensador.

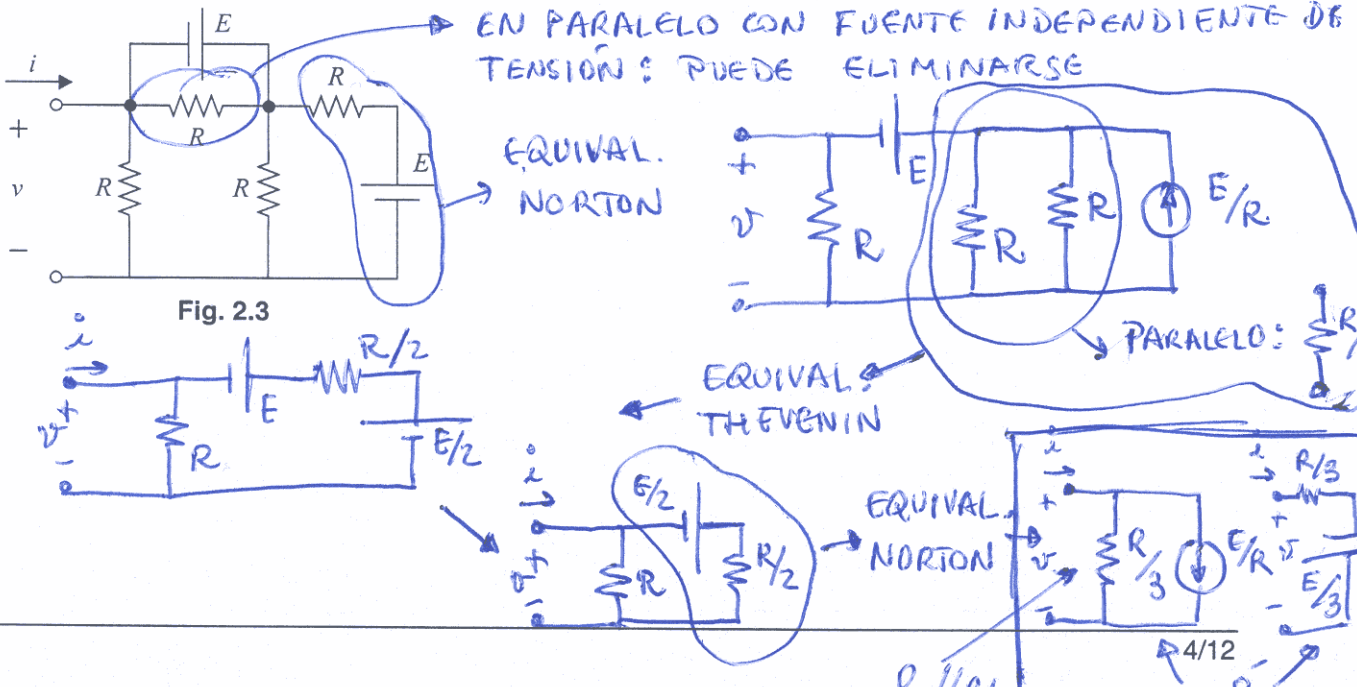
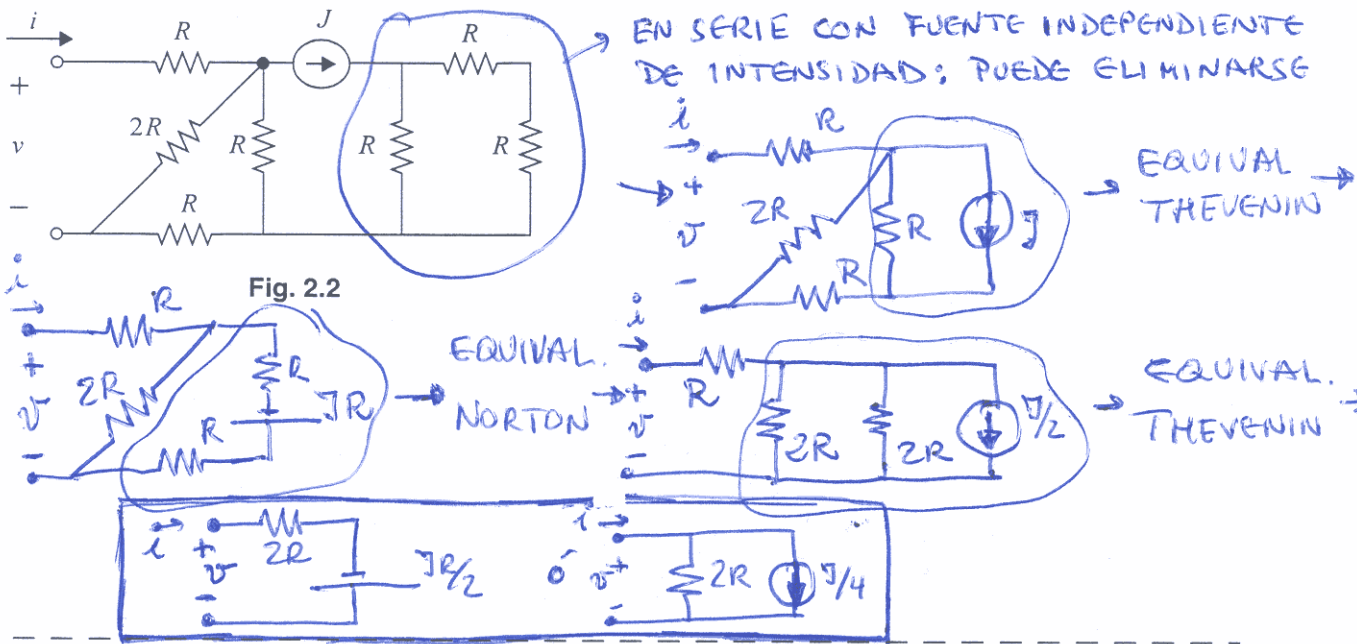
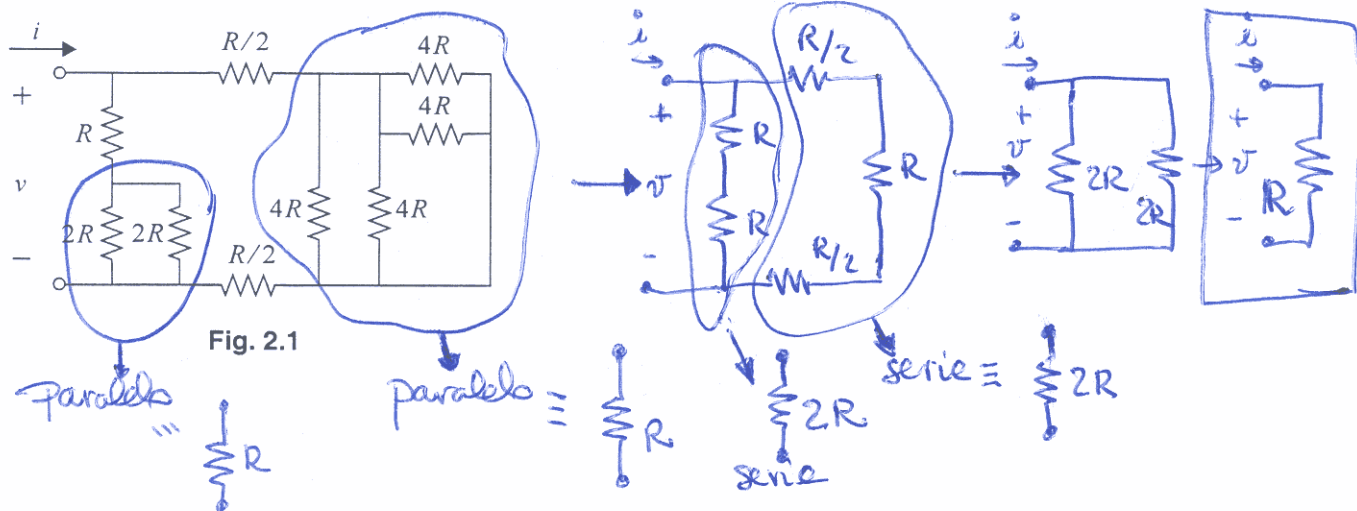


La característica de la izquierda es para $I < J$, la del centro para $I = J$ y la de la derecha para $I > J$. Sólo hay un punto de equilibrio en el último caso. Para $I = J$ hay dos equilibrios pero el modelo de estabilidad es inconsistente para prever la estabilidad del de la derecha ya que la derivada cambia de signo en el punto. La ruta dinámica y las formas de onda para el caso donde $I > J$ son las mostradas abajo



EJERCICIO 2

Para cada una de las siguientes puertas, obtenga una representación equivalente que emplee el menor número de elementos posible.



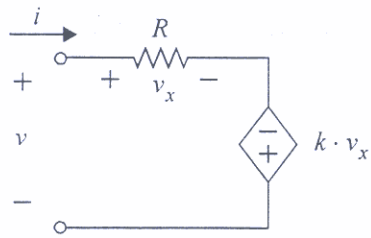


Fig. 2.4

KVL: $-v + iR - k v_x = 0$
 Ohm: $v_x = iR$
 $v = i(R - kR)$

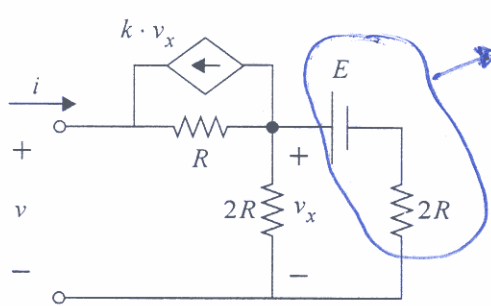
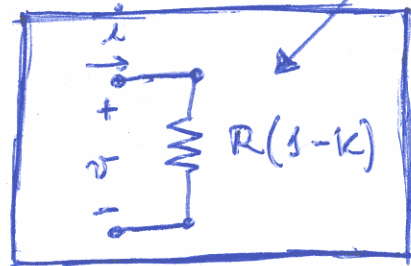
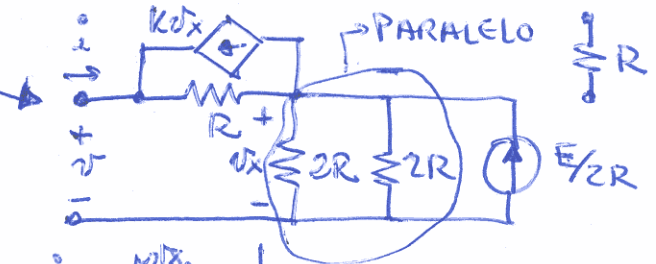


Fig. 2.5

EQUIVALENTE NORTON



KCL (A)
 $i + \frac{E}{2R} = \frac{v_x}{R}$

KVL:

$-v + (i + k v_x)R + v_x = 0$

$i = \frac{v}{2R + kR^2} - \frac{E}{2(2 + kR)} \left(\frac{1}{R} + k \right)$

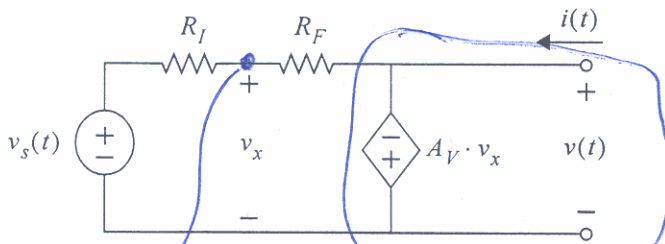
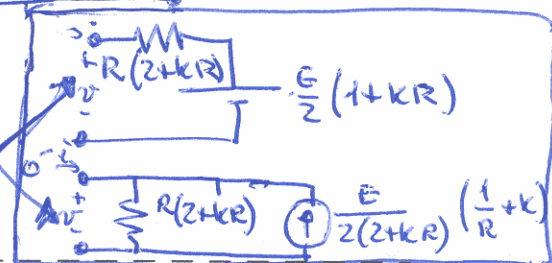
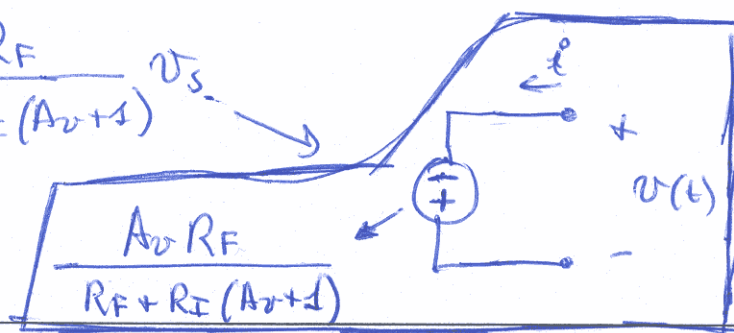


Fig. 2.6

$v(t) = -A_v v_x$ V_i

KCL: $\frac{v_s - v_x}{R_I} = \frac{v_x + A_v v_x}{R_F} \Rightarrow v_x = \frac{v_s R_F}{R_F + R_I (A_v + 1)}$

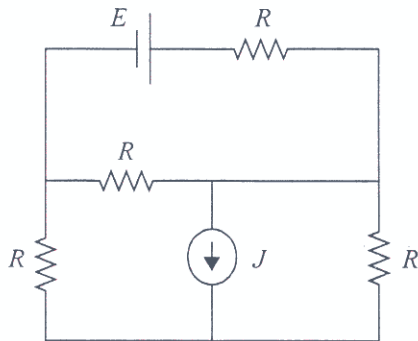
$v(t) = \frac{-A_v R_F}{R_F + R_I (A_v + 1)} v_s$



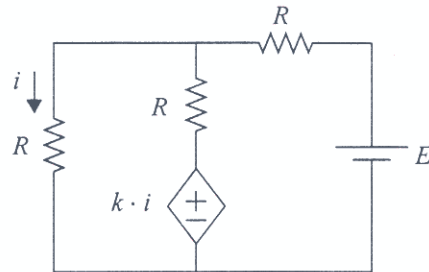
EJERCICIO 3

La figura muestra dos circuitos resistivos lineales, cuyas ecuaciones de funcionamiento se desean formular recurriendo a las técnicas de análisis de nudos y de mallas. Para cada uno de ellos:

- (a) Discuta si son directamente compatibles sin ninguna transformación con el análisis de nudos.
- (b) Obtenga un conjunto de ecuaciones independientes en función únicamente de las tensiones de los nudos.
- (c) Discuta si son directamente compatibles sin ninguna transformación con el análisis de mallas.
- (d) Obtenga un conjunto de ecuaciones independientes en función únicamente de las intensidades en las mallas.



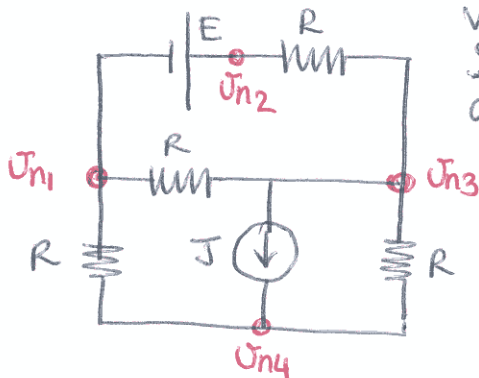
Circuito 3.1



Circuito 3.2

CIRCUITO 3.1

(a) ANÁLISIS DE NUDOS :

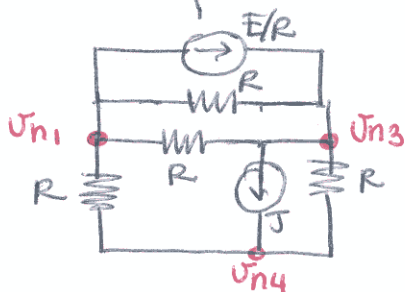


Formulación de KCL, utilizando como variables las tensiones en los nudos. Se requieren las ecuaciones correspondientes a todos los nudos menos uno (nudo tomado como referencia).

Este circuito no es directamente compatible, ya que la corriente a través de la fuente de tensión está indefinida a priori.

(b) Existen múltiples maneras de obtener un conjunto de ecuaciones independientes en función únicamente de V_{ni} . Entre ellas:

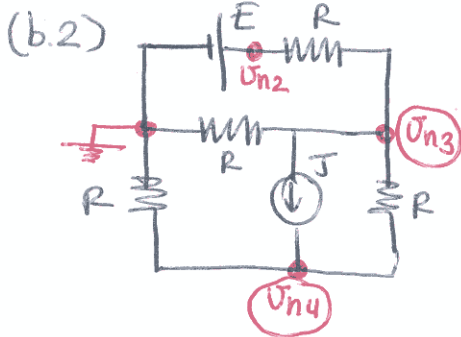
(b.1) Transformar el bloque Thévenin ($V_S - R$) a Norton



$V_{n2} = V_{n1} + E$ (oculto tras la transformación)

$$\begin{bmatrix} 3G & -2G & -G \\ -2G & 3G & -G \\ -G & -G & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n3} \\ V_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E/R \\ E/R - J \\ J \end{bmatrix}$$

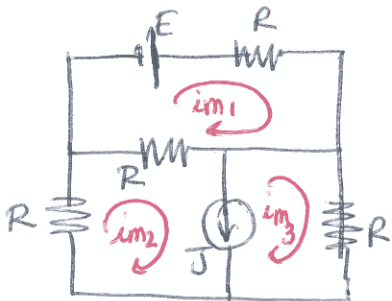
El sistema lo formulación 2 de las 3 ecs. formuladas.



$$\begin{cases} (V_{n2} - V_{n3})G = (V_{n3} - V_{n4})G + J + V_{n3}G & \text{(KCL en } n_3) \\ J = (V_{n4} - V_{n3})G + V_{n4}G & \text{(KCL en } n_4) \\ \boxed{V_{n2} = E} & \text{(fijada por VS)} \end{cases}$$

→ ecuación añadida por inspección

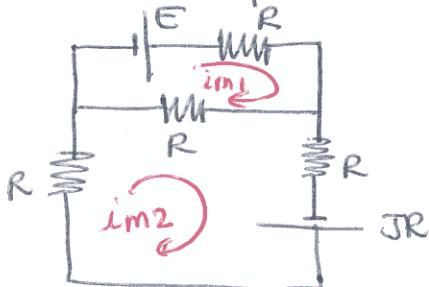
(C) ANÁLISIS DE MALLAS: Formular KVL en las mallas utilizando como variables las intensidades de malla.



Este circuito no es directamente compatible, ya que la tensión entre los terminales de la pente de corriente está indefinida a priori.

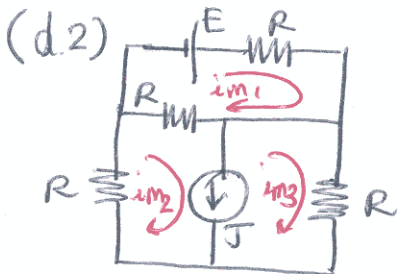
(d) Varias posibilidades para obtener un sistema de ecuaciones. Entre ellas.

(d.1) Transformar el bloque Norton (CS // R) a Thévenin.



$$\underline{im_3 = im_2 - J} \quad \text{(malla oculta tras la transformación)}$$

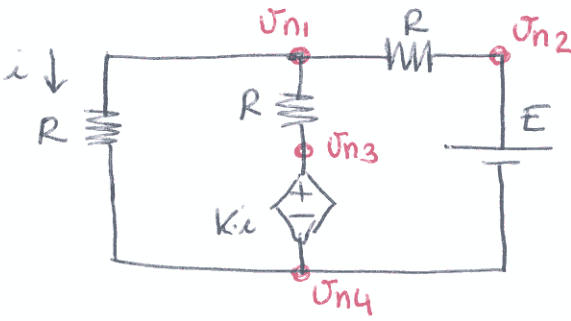
$$\begin{bmatrix} 2R & -R \\ -R & 3R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} im_1 \\ im_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ JR \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \boxed{im_2 - im_3 = J} & \text{→ ecuación añadida por inspección} \\ -E + 2im_1R - im_2R = 0 & \text{(KVL en malla 1)} \\ -E + im_1R + im_3R + im_2R = 0 & \text{(KVL en bucle externo)} \end{cases}$$

CIRCUITO 3.2

(a) ANÁLISIS DE NUDOS:

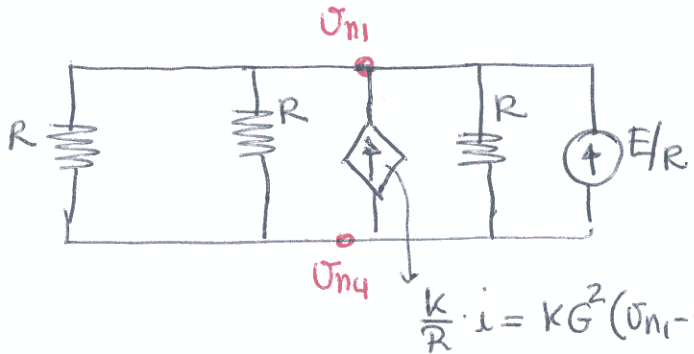


No directamente, ya que las corrientes a través de las fuentes de tensión (independiente y controlada) están indefinidas a priori.

La corriente de control en la CCVS no supone problema, ya que está medida a través de un resistor y se puede poner fácilmente en función de tensiones de nudo [$i = G(V_{n1} - V_{n4})$]

(b) Distintas posibilidades. Entre ellas:

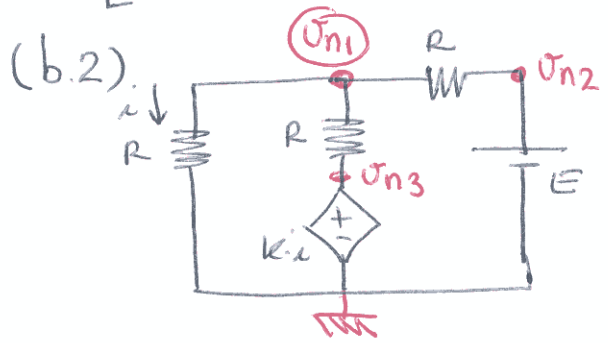
(b.1) Transformar los 2 bloques Thévenin a Norton; definir además la variable de control "i" en función de V_{n1} .



$$\begin{aligned} V_{n2} &= V_{n4} + E \\ V_{n3} &= V_{n4} + K \cdot G(V_{n1} - V_{n4}) \end{aligned}$$

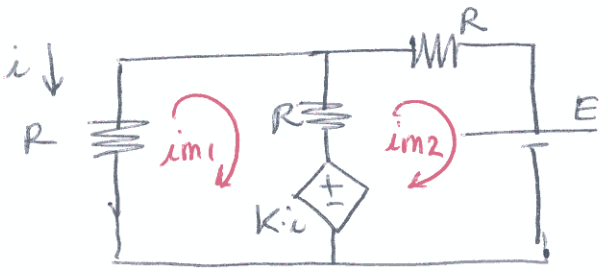
(nodos ocultos tras la transformación)

$$\begin{bmatrix} 3G - KG^2 & -3G + KG^2 \\ -3G + KG^2 & 3G - KG^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E/R \\ -E/R \end{bmatrix} \leftarrow \text{(reducir el problema a rango 1)}$$



$$\begin{cases} (V_{n2} - V_{n1})G = V_{n1}G + (V_{n1} - V_{n3})G & \text{(KCL en } n_1) \\ \boxed{V_{n2} = E} \\ \boxed{V_{n3} = K \cdot V_{n1} G} \end{cases} \leftarrow \text{añadidas por inspección}$$

(c) ANÁLISIS DE MALLAS:



Si, es directamente compatible con el análisis de mallas.

La fuente independiente de tensión no introduce ningún problema, ya que su tensión es conocida al formular KVL en la malla 2.

La CCVS no presenta tampoco problemas:

- Se fija tensión, por lo que su contribución es conocida en KVL.
- La variable de control es corriente, fácil de expresar en función de las intensidades de malla. ($i = -im_1$)

(d)

$$\begin{bmatrix} 2R-K & -R \\ -R+K & 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} im_1 \\ im_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 4

Considere el circuito de la Figura 4, en el que la llave puede conmutar entre las posiciones a o b. Suponga que originalmente ($t = 0^-$) la llave está en la posición b, situación en la que el circuito ha permanecido durante el tiempo suficiente para que esté en estado estacionario. Suponga asimismo que el condensador de la izquierda está descargado.

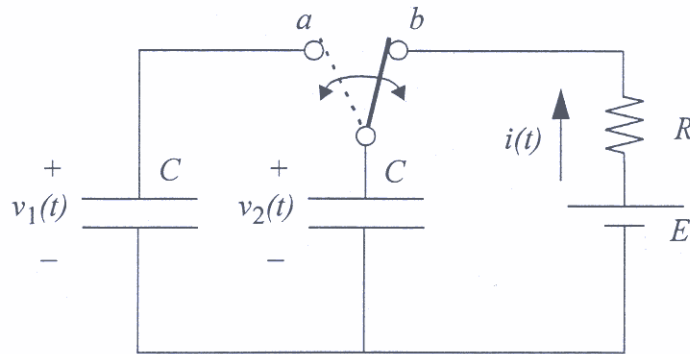


Fig. 4

- (a) Suponiendo que en el instante $t = 0$ la llave conmuta de la posición b a la posición a, determine las tensiones v_1 y v_2 justo después de conmutar la llave. Razone la respuesta.

$t = 0^-$ $t = 0^+$

$\frac{1}{C} v_1(0^-) = 0$ $\frac{1}{C} v_2(0^-) = E$

Proviene de estacionario anterior

Corrección en paralelo, con redistribución de la carga total: $Q(0^-) = CE = Q(0^+) = C V_0 + C V_0$

$v_1(0^+) = v_2(0^+) = V_0$

$V_0 = \frac{E}{2}$

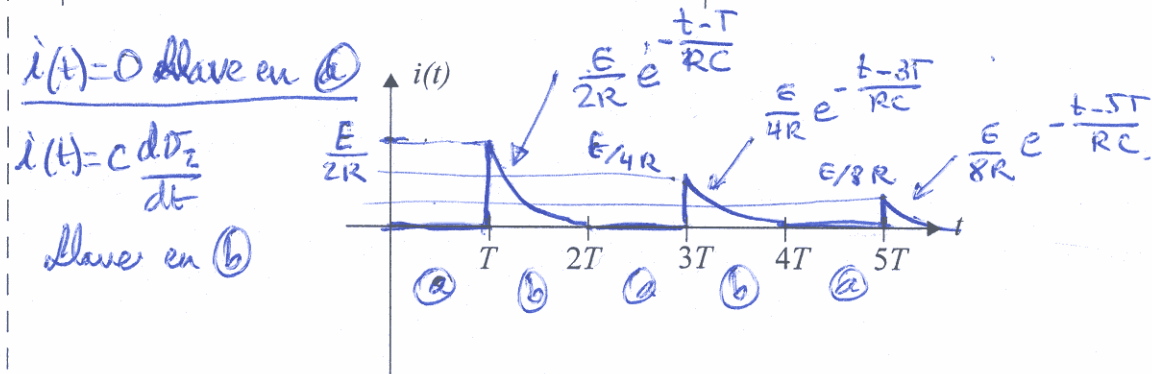
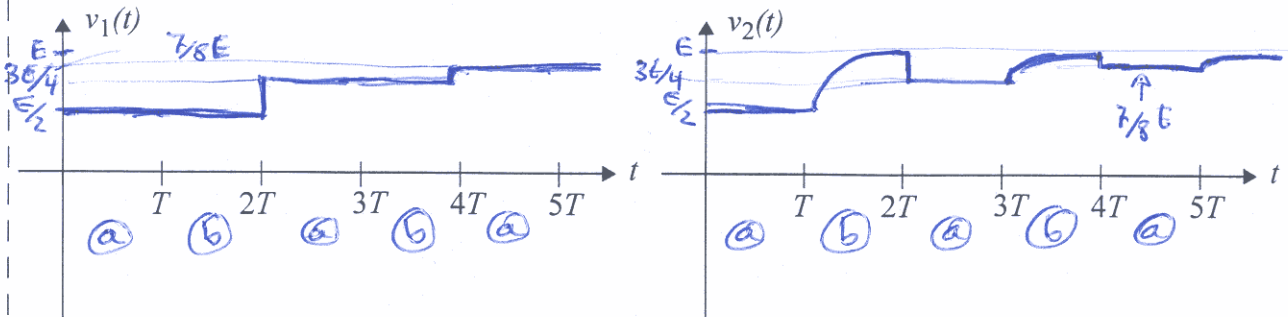
- (b) Una vez la llave esté en la posición a, pasado un tiempo $T = 5RC$ vuelve a conmutar a la posición b, y sucesivamente cambia de una posición a otra periódicamente cada $T = 5RC$. Determine aproximadamente $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$.

Llave en posición (a): $v_1(t)$ y $v_2(t)$ están en paralelo \Rightarrow toman el mismo valor. Ambos condensadores están desconectados de la fuente E.

Llave en posición (b): El C. de la izda está aislado y mantiene su carga. El C. de la derecha se conecta a la fuente E a través de R, cargándose al valor de E con una $\tau = RC$. El valor de partida corresponde al valor de tensión que tenían los condensadores cuando la llave estaba en la posición (a). Como la llave conmuta cada $T = 5RC$, ya se ha llegado al estacionario cuando la llave conmuta a la posición (a).

$0 < t < T$: llave en a $\rightarrow v_1(t) = v_2(t) = \frac{E}{2}$ (apdo a)
 $i(t) = 0$ (circuito abierto)

$T < t < 2T$; llave en (b) \rightarrow C de la izda aislado $v_1(t) = E/2$
 C de la derecha se carga exponencialmente con $e^{-t/RC}$ a partir de $v_2(T^-) = E/2 \Rightarrow v_2(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} (1 - e^{-\frac{t-T}{RC}})$
 $2T < t < 3T$ llave en (a) \rightarrow Nueva redistribución de carga
 $v_1(t) = v_2(t) \Rightarrow Q(2T^-) = C \frac{E}{2} + CE = Q(2T^+) = C v_1(2T^+) + C v_2(2T^+)$
 $\Rightarrow v_1(2T^+) = \frac{3E}{4} = v_2(2T^+)$
 $3T < t < 4T$ llave en (b) \rightarrow C. izda aislado $v_1(t) = \frac{3E}{4}$
 Nueva carga en C derecha $v_2(t) = \frac{3E}{4} + \frac{E}{4} (1 - e^{-\frac{t-3T}{RC}})$
 y así sucesivamente



(c) Determine la energía almacenada en cada condensador en los siguientes instantes: i) $t = 0^-$; ii) $t = T^-$; iii) $t = 2T^-$ y iv) $t \rightarrow \infty$.

- i) $E_{C1} = 0$; $E_{C2} = \frac{1}{2} CE^2$
- ii) $E_{C1} = \frac{1}{2} C \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} CE^2$; $E_{C2} = \frac{1}{2} C \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} CE^2$
- iii) $E_{C1} = \frac{1}{2} C \left(\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} CE^2$; $E_{C2} = \frac{1}{2} CE^2$
- iv) $t \rightarrow \infty \rightarrow v_1(t) \rightarrow E$; $E_{C1} = \frac{1}{2} CE^2$; $E_{C2} = \frac{1}{2} CE^2$
 $v_2(t) \rightarrow E$

La energía almacenada va aumentando gracias a la carga de la fuente e

EJERCICIO 5

Considere el circuito de la Figura 5.1, en el que inicialmente el condensador se encuentra cargado a una tensión $v_C(0) = E_0$ y la bobina está descargada. En un determinado instante $t = t^*$ la llave cambia de posición, conectando la red resistiva al circuito.

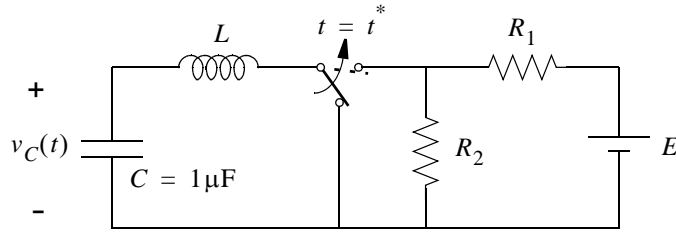


Fig. 5.1

(a) Calcule los valores de R_1 , R_2 y L si la tensión en el condensador presenta la forma de onda mostrada en la Figura 5.2.

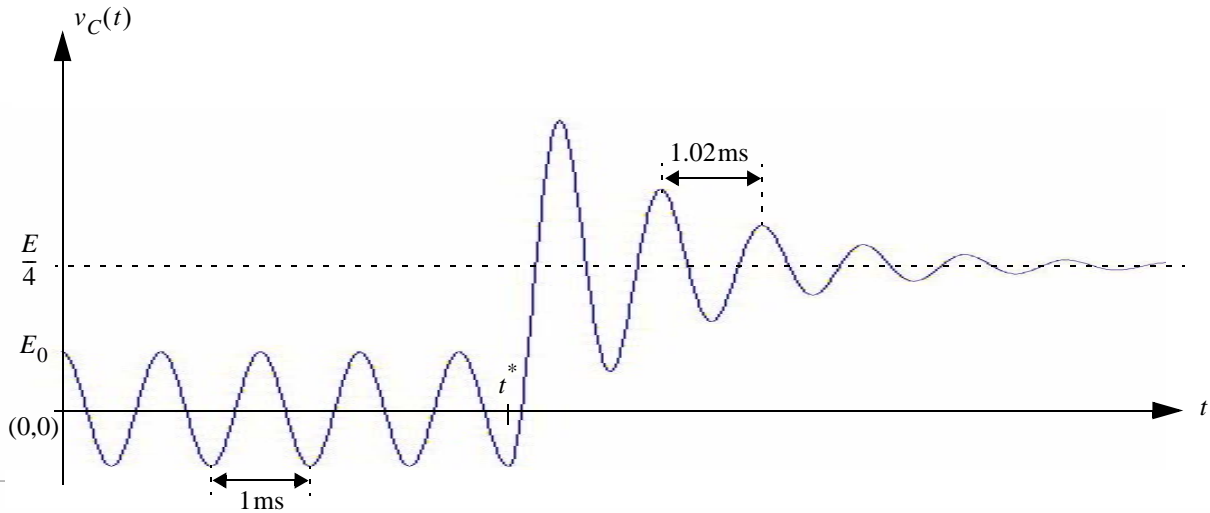
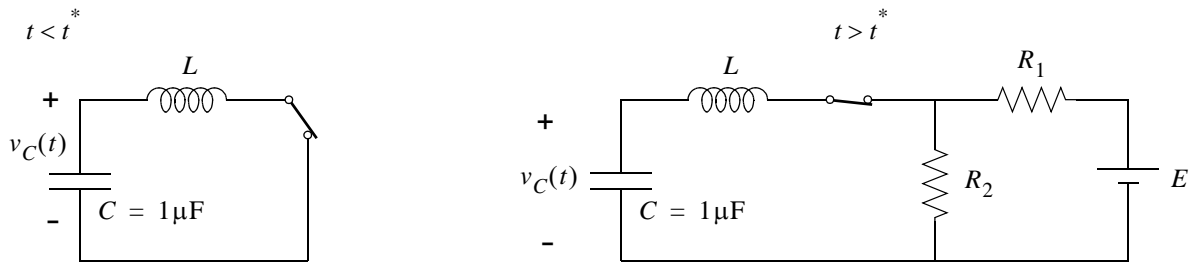


Fig. 5.2

Dependiendo del estado de la llave, el circuito cambia su topología. Las dos topologías se muestran abajo,



La topología de la izquierda muestra un **resonador sin pérdidas**. Si en un momento dado este circuito tiene almacenada una determinada cantidad de energía (eléctrica o magnética), dicha energía se mantiene “ad infinitum” dado que no hay pérdidas. Obviamente esta es una situación ideal que nunca se da en la práctica. Además, el circuito mantiene la energía a la vez que realiza un “movimiento” armónico, donde hay un trasvase continuo entre energía eléctrica del condensador y energía magnética de la bobina. Este movimiento armónico se obtiene resolviendo la ecuación diferencial que describe la dinámica del circuito,

$$\frac{d^2}{dt^2}v_C(t) = -\frac{1}{LC}v_C(t) \quad (1)$$

La solución es una señal sinusoidal cuya frecuencia angular es $\omega_o = \sqrt{1/(LC)}$,

$$v_C(t) = \sin(\omega_o t + \phi) \quad (2)$$

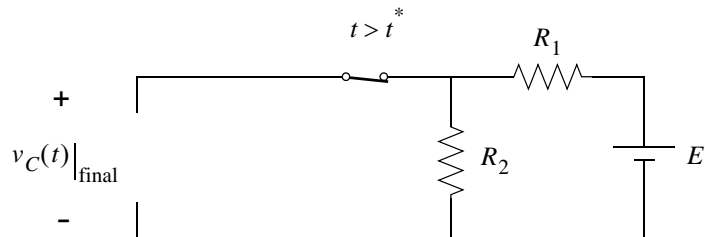
La forma de onda correspondiente a $t < t^*$ muestra un periodo $T = 1\text{ms}$. A partir de aquí se obtiene el valor de C como sigue,

$$T = 1\text{ms} \Rightarrow \omega_o = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s} \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_o^2} \approx 25\text{mH} \quad (3)$$

La topología de la derecha muestra un **resonador con pérdidas (debido a la presencia de resistencias) excitado con una fuente DC**. Con respecto a este circuito son pertinentes la siguientes observaciones y cálculos:

- La energía inicial se disipa con el tiempo debido a la presencia de las resistencias. El **estado final** está determinado por la fuente de excitación DC. En este estado final el condensador es un abierto y la bobina es un corto. Por tanto, el estado final se corresponde con la solución del circuito de abajo, que se muestra a la izquierda del esquemático del circuito.

$$v_C(t)|_{\text{final}} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



La figura muestra que el estado final es $E/4$. Por tanto,

$$R_1 = 3R_2 \quad (4)$$

- El movimiento hacia el estado final es del tipo **sub-amortiguado**. Este movimiento implica una frecuencia de movimiento y un coeficiente de amortiguamiento. Por teoría sabemos que la frecuencia está dada en función de la frecuencia de resonancia y del propio coeficiente de amortiguamiento,

$$\Omega_o = \omega_o \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5)$$

- El coeficiente de amortiguamiento es función de la resistencia equivalente, que es la resultante del paralelo entre R_1 y R_2 : $R = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$. De teoría, o mediante una análisis elemental del circuito obtenemos que,

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (6)$$

Por tanto, combinando (5) y (6) y puesto que la forma de onda nos da el valor de Ω_o ,

$$\Omega_o = \frac{2\pi}{1.02 \times 10^{-3}} \quad (7)$$

Es inmediato obtener el valor de ξ , primero y de R después. Una vez conocido R , con la ecuación (4) obtenemos R_1 y R_2 ,

$$\xi \approx 0.19 \Rightarrow R = 2\xi \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 60\Omega \Rightarrow \begin{cases} R_2 \approx 80\Omega \\ R_1 \approx 240\Omega \end{cases} \quad (8)$$

- (b) Suponiendo que los valores de C , L y R_2 se mantienen con respecto al caso anterior, se desea ajustar R_1 de manera que la respuesta sea sobreamortiguada a partir de $t = t^*$. ¿Qué condición debe cumplir R_1 para asegurarlo?

Represente de forma aproximada la forma de onda que presentaría $v_C(t)$ en este caso.

Matemáticamente, la respuesta sobre-amortiguada se corresponde con $\xi > 1$. Físicamente para que se dé este caso hay que aumentar las pérdidas resistivas. Dado que el resonador que tenemos es uno serie, el aumento de las pérdidas se corresponde con el aumento de la resistencia, lo que se corrobora matemáticamente observando la expresión del coeficiente de amortiguamiento. Expresando la resistencia equivalente en función de ξ ,

$$R = 2\xi\sqrt{\frac{L}{C}} \approx (\xi \times 317)\Omega \quad (9)$$

notamos que tiene que ser mayor de 317Ω para que se dé el caso sobre-amortiguado. Como el valor final sigue siendo el mismo se sigue verificando la ecuación (4) y, por tanto,

$$R \geq 2\xi\sqrt{\frac{L}{C}} \Big|_{\xi=1} \approx 317\Omega \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_2 \geq 422.7\Omega \\ R_1 \geq 1268\Omega \end{cases} \quad (10)$$

Manteniendo R_2 no es posible por tanto obtener una respuesta sobre-amortiguada. Tampoco sería posible manteniendo R_1 . Hay que cambiar ambos. Si así se hiciera, la respuesta sería la mostrada abajo, donde el ritmo de caída depende del valor concreto de ξ .

